

МАТЕМАТИКА 1

ЛЕКЦИЈА 8

2 – Л8.1 ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

Теорема (Лопиталова, прва верзија). Нека функције f и g , дефинисане (бар) на неком интервалу $(a, a+r)$ ($r > 0$), испуњавају следеће услове:

(i) f и g су диференцијабилне у интервалу $(a, a+r)$;

(ii) $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, a+r)$;

(iii) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$;

(iv) постоји $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Тада постоји $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Доказ. Додефинишимо функције f и g у тачки a : $f(a) := 0$, $g(a) := 0$. Тада f и g испуњавају услове за примену Кошијеве теореме на сваком сегменту $[a, x]$, $a < x < a+r$. Дакле, за свако $x \in (a, a+r)$ постоји $\xi \in (a, x)$ (ξ зависи од x) такво да је

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Зато је

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l,$$

јер кад $x \rightarrow a+$ тада и $\xi \rightarrow a+$ (због $a < \xi < x$).

Овде може да буде и $l = \pm\infty$.

Слична теорема важи и за гранични процес $x \rightarrow a-$, и доказује се на исти начин. Треба само у формулацији и доказу горње теореме свуда заменити $x \rightarrow a+$ са $x \rightarrow a-$, интервал $(a, a+r)$ са $(a-r, a)$, и у доказу сегмент $[a, x]$ сегментом $[x, a]$. Тако се долази до теореме коју можемо звати *другом верзијом Лопиталове теореме*.

Прва и друга верзија Лопиталове теореме заједно дају следећу теорему.

Теорема (Лопиталова, трећа верзија). Нека функције f и g , дефинисане (бар) у некој пунктираној базичној околини $B(a, r)$ тачке a , испуњавају следеће услове:

(i) f и g су диференцијабилне у $B(a, r)$;

(ii) $g'(x) \neq 0$, $x \in B(a, r)$;

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

$$(iv) \quad \text{постоји } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Тада постоји $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Важи и теорема слична горњим за гранични процес $x \rightarrow +\infty$, као и за гранични процес $x \rightarrow -\infty$. Ове теореме ћемо звати четвртом и петом верзијом Лопиталове теореме. Формулисаћемо и доказати четврту верзију.

Теорема (Лопиталова, четврта верзија). Нека функције f и g , дефинисане (бар) на неком интервалу $(R, +\infty)$ ($R > 0$), испуњавају следеће услове:

$$(i) \quad f \text{ и } g \text{ су диференцијабилне у интервалу } (R, +\infty);$$

$$(ii) \quad g'(x) \neq 0, \quad x \in (R, +\infty);$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0;$$

$$(iv) \quad \text{постоји } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Тада постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Доказ. Нека је

$$f_1(t) := f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ и } g_1(t) := g\left(\frac{1}{t}\right) \text{ за } t \in \left(0, \frac{1}{R}\right)$$

($t \in \left(0, \frac{1}{R}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{t} \in (R, +\infty)$). Како је

$$f'_1(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right), \quad g'_1(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right),$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'_1(t)}{g'_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

(смена $x = \frac{1}{t}$), то функције f_1 и g_1 испуњавају услове из прве верзије Лопиталове теореме ($a = 0$). Зато је

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'_1(t)}{g'_1(t)} = l.$$

Но, како је

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1\left(\frac{1}{x}\right)}{g_1\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(смена $t = \frac{1}{x}$), то је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Пета верзија Лопиталове теореме (за гранични процес $x \rightarrow -\infty$) добија се од четврте замењивањем $x \rightarrow +\infty$ са $x \rightarrow -\infty$, и интервала $(R, +\infty)$ интервалом $(-\infty, R)$ ($R < 0$), у формулацији и доказу.

У свакој од досадашњих теорема говори се о налажењу граничне вредности количника двеју функција које обе теже нули, тј. (како се то каже) о налажењу граничне вредности привидно неодређеног израза облика $\frac{0}{0}$. Наредна теорема

односи се на привидно неодређене изразе облика $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема (Лопиталова, шеста верзија). Нека функције f и g , дефинисане (бар) на неком интервалу $(a, a+r)$ ($r > 0$), испуњавају следеће услове:

(i) f и g су диференцијабилне у интервалу $(a, a+r)$;

(ii) $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, a+r)$;

(iii) $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = +\infty$;

(iv) постоји $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Тада постоји $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Доказ. За дати позитивни број ε нека је δ_1 такав позитивни број да је

$\delta_1 < r$ и $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ за сваки $x \in (a, a+\delta_1)$. (Такав број δ_1 постоји јер је

испуњен услов (iv).) Обележимо $a+\delta_1$ краће са b . Према Кошијевој теорему, примењеној на функције f и g на сегменту $[x, b]$, за сваки $x \in (a, b)$ постоји

$\xi \in (x, b)$ такав да је $\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Зато је $\left| \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ за $x \in (a, b)$.

Како је $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = -\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} \frac{g(b)}{g(x)} + \frac{f(b)}{g(x)}$, и како је функција

$\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}$ ограничена на интервалу (a, b) (јер је $l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} < l + \frac{\varepsilon}{2}$ за

$x \in (a, b)$, а функције $-\frac{g(b)}{g(x)}$ и $\frac{f(b)}{g(x)}$ теже нули кад $x \rightarrow a+$ (због (iii)), то функција $A(x) := \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}$ тежи нули кад $x \rightarrow a+$. На основу тога, постоји неки позитивни број δ мањи од δ_1 , такав да је $|A(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за $x \in (a, a+\delta)$. Према томе, за $x \in (a, a+\delta)$ је

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| A(x) + \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} - l \right| \leq |A(x)| + \left| \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тј. $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon$. Како је ε овде произвољан позитивни број, то је, према

дефиницији граничне вредности, $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Доказ је завршен.

Овакве теореме важе и за граничне процесе $x \rightarrow a-$, $x \rightarrow a$, $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ (седма, осма, девета и десета верзија Лопиталове теореме).

Свака од наведених десет верзија Лопиталове теореме садржи правило (Лопиталово) за налажење граничне вредности количника двеју функција, ако је тај количник привидно неодређен израз облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$: ако су испуњени услови теореме, наћи граничну вредност извода тих функција и на тај начин наћи тражену граничну вредност.

Сем у облицима $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, привидно неодређени изрази се јављају и у облицима $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 и ∞^0 . Лопиталово правило се може посредно применити при налажењу граничних вредности привидно неодређених изрази последњих пет облика, јер се сваки од тих облика може свести на облик $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Наиме, облик $0 \cdot \infty$ се своди на облик $\frac{0}{0}$ на следећи начин: $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$, облик

$\infty - \infty$ се своди на облик $\frac{0}{0}$ на следећи начин:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}},$$

а облици 1^∞ , 0^0 и ∞^0 свде се на облик $0 \cdot \infty$ на следећи начин: $f^g = e^{g \ln f}$.

2 – Л8.2 ТЕЈЛОРОВА ТЕОРЕМА

Теорема (Тејлорова). Нека је функција f дефинисана (бар) на сегменту $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), нека на том сегменту има непрекидан n -ти извод $f^{(n)}$ и нека $f^{(n+1)}$ постоји у отвореном интервалу (x_0, x) (односно (x, x_0)) ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). Тада постоји $c \in (x_0, x)$ ($c \in (x, x_0)$) такав да је

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Доказ. Означимо $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$ са $T_n(f; t, x)$, за $t \in [x_0, x]$ ($[x, x_0]$).

Функције $F(t) := T_n(f; t, x)$, $t \in [x_0, x]$ ($[x, x_0]$), и $G(t) := (x-t)^{n+1}$, $t \in [x_0, x]$ ($[x, x_0]$), испуњавају услове Кошијеве теореме на сегменту $[x_0, x]$ ($[x, x_0]$). (Проверити.) Применом Кошијеве теореме закључујемо да постоји $c \in (x_0, x)$ ((x, x_0)) такав да је

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

Како је $F(x) = f(x)$, $F(x_0) = T_n(f; x_0; x)$, $G(x) = 0$, $G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$, $F'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n$, $G'(c) = -(n+1)(x-c)^n$, то је, према горњој једнакости,

$$\frac{f(x) - T_n(f; x_0; x)}{-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n},$$

тј.

$$f(x) - T_n(f; x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Доказ је завршен..

Полином по x $T_n(f; x_0; x)$ назива се Тејлоровим полиномом n -тог степена око тачке x_0 функције f , разлика $f(x) - T_n(f; x_0; x)$ се назива остатком у Тејлоровој формули n -тог реда око тачке x_0 функције f , и обележава се са $R_n(f; x_0; x)$, а једнакост $f(x) = T_n(f; x_0; x) + R_n(f; x_0; x)$ је Тејлорова формула n -тог реда око тачке x_0 функције f . Ако је $x_0 = 0$ онда се Тејлорова формула назива Маклореновом формулом, а Тејлорова теорема Маклореновом теоремом.

Израз на десној страни једнакости на крају горњег доказа је тзв. Лагранжов облик остатка $R_n(f; x_0; x)$. "Међувредност" c у том изразу може да се представи овако: $c = x_0 + \theta(x-x_0)$ за неки број θ такав да је $0 < \theta < 1$. Ово важи како за $x > x_0$ тако и за $x < x_0$.

Маклоренове формуле произвољног реда неких функција:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$\sin x = \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!} x^{2j-1} + \frac{(-1)^m \cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (m \in \mathbf{N});$$

$$\cos x = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} + \frac{(-1)^{m+1} \cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (m \in \{0\} \cup \mathbf{N});$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}, \quad x > -1, \quad (n \in \{0\} \cup \mathbf{N}) \quad (\alpha \in \mathbf{R});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{n+1} (1+\theta x)^{-n-1} x^{n+1}, \quad x > -1, \quad (n \in \{0\} \cup \mathbf{N}).$$